CONCOURS SPÉCIAL T' 1980

**048 012**

J. 1688

– 84 –

# ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE

DURÉE : 2 heures

---

## PREMIÈRE PARTIE

I.1° Démontrer que les racines strictement positives de l'équation $(tg\, x = 2\, x)$ forment une suite strictement croissante notée $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $n\pi < \theta_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.2° Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \operatorname{Arctg} u_n$. On pose $k = \frac{2}{5}$. Donner un encadrement de $\frac{u_1 - u_0}{1 - k}$ par deux nombres de la forme $(10^{-3}\, p,\ 10^{-3}\, (p + 1))$, où $p \in \mathbb{N}$.

I.3° Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité suivante :

$$0 < 2\theta_0 - u_n < \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

I.4° A partir de quelle valeur entière $m$ a-t-on $\left(\frac{2}{5}\right)^{m+1} \leqslant 10^{-3}$ ? Placer dans un tableau les valeurs de $u_n$ pour $1 \leqslant n \leqslant m + 3$, arrondies au nombre de la forme $10^{-5}\, q$ $(q \in \mathbb{N})$ le plus voisin. En déduire une valeur approchée de $\theta_0$ à $10^{-4}$ près.

## DEUXIÈME PARTIE

II.1° Soit $f$ l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et, sur $]0, 1]$, par $f(x) = \left(\frac{x}{\sin \theta_0} \sin \frac{\theta_0}{x^2}\right)^2$. Démontrer l'existence de deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que :

$$1 = a_0 > b_0 > a_1 > b_1 > \ldots > b_{n-1} > a_n > b_n > \ldots > 0$$

formées des abscisses des extrema locaux de $f$.

II.2° Étudier les variations et les limites des suites $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(b_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

II.3° Déterminer une suite décroissante $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f(c_n) = \frac{c_n^2}{2 \sin^2 \theta_0}$. Trouver un équivalent de $f'(c_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

II.4° Déterminer les images de $[0, 1]$ par $f$ et par sa dérivée $f'$ (on déterminera d'abord l'ensemble des points où $f$ est dérivable).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail